$P(j)$ jest prawdopodobieństwem wylosowania osoby w wieku j, to $P(14) = 1/14$, $P(15) = 1/14$, $P(16) = 3/14$ i tak dalej. Ogólnie:

$$P(j) = \frac{N(j)}{N}. \tag{1.5}$$

Zauważ, że prawdopodobieństwo wylosowania osoby w wieku 14 *lub* 15 lat to suma prawdopodobieństw każdego z tych zdarzeń z osobna (w tym przypadku 1/7). W szczególności suma wszystkich prawdopodobieństw wynosi 1. Każda wybrana osoba musi mieć jakiś wiek:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1.$$

Pytanie 2: Jaki jest **najbardziej prawdopodobny** wiek wylosowanej osoby?

Odpowiedź: Oczywiście jest to 25 lat. W takim wieku jest aż pięć osób, podczas gdy co najwyżej trzy osoby są w takim samym wieku, innym niż 25 lat. Najbardziej prawdopodobne j to takie, dla którego $P(j)$ jest wartością maksymalną.

Pytanie 3: Jaka jest **mediana** wieku?

Odpowiedź: Jest to wiek 23 lat, ponieważ 7 osób ma mniej niż 23 lata, a 7 jest starszych. Mediana to taka wartość j, dla której prawdopodobieństwo uzyskania większego wyniku jest takie samo, jak prawdopodobieństwo uzyskania mniejszego wyniku.

Pytanie 4: Jaki jest **średni** wiek?

Odpowiedź:

$$\frac{(14) + (15) + 3(16) + 2(22) + 2(24) + 5(25)}{14} = \frac{294}{14} = 21.$$

Ogólnie, średnia z j wartości (co powinno być zapisywane jako $\langle j \rangle$) wynosi:

$$\langle j \rangle = \frac{\sum j N(j)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} j P(j). \tag{1.7}$$

Zauważ, że w danych nie musi występować osoba ze średnim wiekiem ani wiekiem równym medianie. W rozpatrywanym przykładzie nikt nie ma 21 ani 23 lat. W mechanice kwantowej średnia jest zwykle wielkością zainteresowania. W tym kontekście nazywa się to **wartością oczekiwaną**. Jest to termin wprowadzający w błąd, ponieważ sugeruje, że jest to wynik, który najprawdopodobniej uzyskasz, jeśli wykonasz pojedynczy pomiar. Byłaby to zatem *najbardziej prawdopodobna wartość*, a nie wartość średnia. Obawiam się jednak, że utknęliśmy z tym.

Pytanie 5: Jaka jest średnia z *kwadratów* wieku rozpatrywanych osób?

Odpowiedź: Możesz otrzymać $14^2 = 196$ z prawdopodobieństwem 1/14, $15^2 = 225$ z prawdopodobieństwem 1/14 lub $16^2 = 256$ z prawdopodobieństwem 3/14 i tak dalej. Średnia z kwadratów wynosi więc:

$$\langle j^2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 P(j). \tag{1.8}$$

Ogólnie, średnia wartość pewnej funkcji zmiennej j wynosi:

$$\boxed{\langle f(j)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)P(j).} \tag{1.9}$$

(Równania (1.6), (1.7) i (1.8) są specjalnymi przypadkami tego wzoru). *Uwaga*: średnia kwadratów $\langle j^2\rangle$ nie jest na ogół równa kwadratowi średniej $\langle j\rangle^2$. Na przykład, jeśli w pokoju jest tylko dwoje dzieci w wieku 1 i 3 lat, to wtedy $\langle j^2\rangle = 5$, lecz $\langle j\rangle^2 = 4$.

Histogramy przedstawione na rysunku 1.6 wyraźnie się różnią, pomimo że mają taką samą medianę, średnią, najbardziej prawdopodobną wartość i taką samą liczebność. Pierwszy jest mocno skupiony wokół wartości średniej, podczas gdy drugi jest szeroki i płaski. (Pierwszy histogram może reprezentować profil wiekowy uczniów w klasie w dużym mieście, a drugi – być może profil wiekowy uczniów w wiejskiej jednosalowej szkole). Potrzebujemy liczbowej miary wielkości „rozproszenia" rozkładu w odniesieniu do wartości średniej. Najbardziej oczywistym sposobem na zrobienie tego byłoby sprawdzenie, jak bardzo każda wartość różni się od średniej:

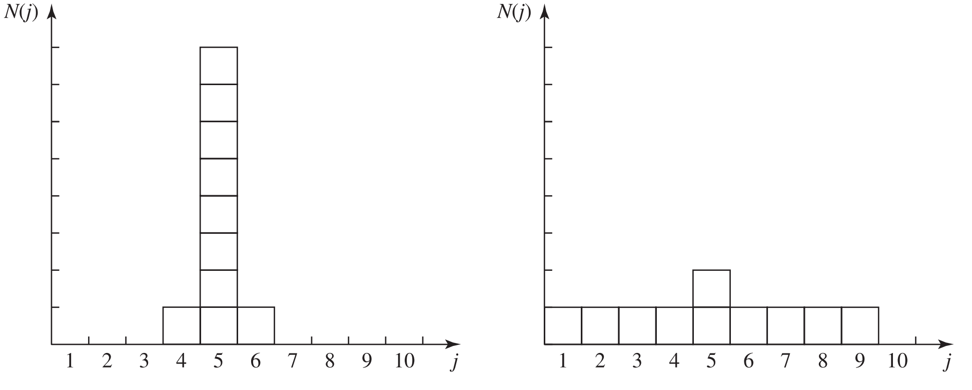
$$\Delta j = j - \langle j\rangle, \tag{1.10}$$

i następnie obliczenie średniej Δj. Problemem jest jednak to, że w rezultacie otrzymasz *zero*.

$$\begin{aligned}\langle \Delta j\rangle &= \sum (j - \langle j\rangle)P(j) = \sum jP(j) - \langle j\rangle \sum P(j)\\ &= \langle j\rangle - \langle j\rangle = 0.\end{aligned}$$

(Zauważ, że $\langle j\rangle$ jest stałe i nie zmienia się, gdy przechodzisz od jednego wartości próbki do drugiej, tak więc można to wyrażenie wyciągnąć przed sumę). W celu uniknięcia tego irytującego problemu możesz zdecydować o uśrednieniu *wartości bezwzględnej* Δj, jednak wartości bezwzględne są kłopotliwe w obliczeniach. Zamiast tego omijamy problem ze znakiem, *podnosząc wyrażenie do kwadratu* przed jego uśrednieniem:

$$\sigma^2 \equiv \left\langle (\Delta j)^2 \right\rangle. \tag{1.11}$$



Rysunek 1.6. Dwa histogramy z taką samą medianą, średnią i najbardziej prawdopodobną wartością, ale z różnymi odchyleniami standardowymi